

Caracterización de señales ECG empleando un modelo del pulso cardíaco y dinámica no lineal: Una prueba piloto

D. Peluffo, C. Ospina, G. Olivart, J. L. Rodríguez, G. Castellanos
 Semana Técnica de Ingenierías Eléctrica y Electrónica
 Universidad Nacional de Colombia, sede Manizales Octubre, 2009

Resumen—En este trabajo se presenta una prueba piloto de una nueva técnica de caracterización de señales ECG empleando un modelo del pulso cardíaco y técnicas de análisis de sistemas no lineales. Las señales empleadas en este estudio son extraídas de la base de datos de arritmias del MIT (MIT-BIH). La caracterización se hace a partir de la sintonización secuencial de los parámetros del modelo por cada latido. Para esto, se desarrolla una etapa de preproceso para eliminar las ondas P y T de cada latido, de forma que la señal sea, morfológicamente, comparable con la respuesta del modelo. La comparación se realiza estimando el grado de disimilitud de las señales a través del algoritmo DTW. Adicionalmente, se realiza un análisis de bifurcaciones del modelo para estudiar la correlación de la respuesta del modelo con la presencia de alguna patología o falla en el sistema de adquisición de la señal.

I. INTRODUCCIÓN

La electrocardiografía es el campo de la medicina encargado del registro de la actividad eléctrica del corazón mediante técnicas no invasivas, y es por esto último que se ha convertido en el método de uso más frecuente. En Fig. 1 se muestra la señal electrocardiográfica (ECG) normal.

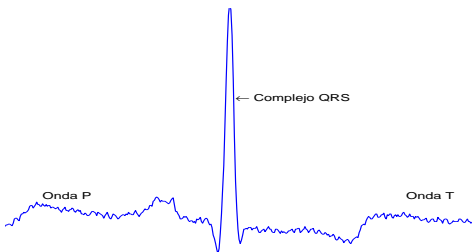


Fig. 1. Latido ECG normal

La extracción de características de las señales ECG proporciona información significativa para la detección de patologías cardíacas como arritmias y enfermedades

coronarias. Comúnmente, la revisión de estas señales es soportada por un sistema de análisis computarizado, que opera fuera de línea y evalúa todo el registro considerando, entre otros aspectos, la variabilidad morfológica de la señal.

El modelo Bonhoeffer-van der Pol (BVP) es una versión generalizada del oscilador de van der Pol (Balthasar van der Pol, 1926) y describe, con parámetros adecuados, el comportamiento de los potenciales de membrana y, por tanto, permite también modelar el ritmo del pulso cardíaco. El modelo BVP se estudia ampliamente en [1].

En el presente trabajo se presentan resultados preliminares de una nueva técnica de caracterización de señales ECG empleando el modelo BVP y técnicas de dinámica no lineal. El método consiste en la búsqueda heurística de los parámetros que generen la respuesta, morfológicamente, más aproximada a la señal de interés (cada latido). Las señales empleadas en este estudio son extraídas de la base de datos de arritmias del MIT.

El método de alineamiento temporal no lineal DTW (*Dynamic Time Warping*), fue escogido como medida de disimilitud porque en este proceso se ajusta sólo la longitud de aquellos tramos de las señales que resulte más conveniente desde el punto de vista de su comparación, es decir, que considera características morfológicas [2]. Además, permite comparar vectores sin que, necesariamente, deban tener la misma longitud y esto resulta conveniente debido a que las etapas de preproceso y extracción generan señales de diferentes longitudes.

Adicionalmente, para que la señal original sea comparable con la respuesta del modelo, se desarrolla una etapa de preproceso en la que se eliminan las ondas P y T derivando la señal, y posteriormente, se aplica una

normalización para evitar los efectos de dc y amplitud.

Al final, la caracterización de la señal corresponde a los parámetros resultantes. La representación de los parámetros es evaluada a través de un análisis del espacio de estados y la respuesta del modelo. Además, se realiza un análisis de bifurcaciones del modelo para estudiar la correlación con la presencia de alguna patología o falla en el sistema de adquisición de la señal.

II. MODELO BVP

En general, un sistema amortiguado no forzado de segundo orden puede representarse con la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x)\frac{dx}{dt} + g(x)x = \ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x)x = 0 \quad (1)$$

Esta ecuación permite estudiar el estado transitorio del sistema. Nótese que si f y g son constantes, el modelo es lineal.

Haciendo la sustitución $f(x) = \mu(x^2 - 1)$ y $g(x) = 1$, se tendría:

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \quad (2)$$

La anterior ecuación corresponde al oscilador de van der Pol, donde μ es un escalar. Nótese que el oscilador de van der Pol tiene amortiguamiento no lineal, por tanto es no conservativo.

El valor de μ indica la naturaleza del sistema, así:

- Si $\mu < 0$, el sistema es amortiguado.
- Si $\mu \geq 0$ el sistema entra a un ciclo límite. La energía se pierde si el sistema no entra inmediatamente a un ciclo límite. En el caso particular, $\mu = 0$, el sistema es no amortiguado y se genera una función de la forma $\ddot{x} + x = 0$ que corresponde a al de un oscilador armónico simple.
- Si $|\mu| \gg 0$, el sistema es altamente amortiguado y pierde toda la energía rápidamente.

La forma de la ecuación (2) sugiere que es conveniente usar la transformación de Liénard [3] para obtener la representación en espacio de estados.

La transformación de Liénard generalizada, con $x_1 = x$, puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= h(x_2) - F(x_1) \\ \dot{x}_2 &= -g(x_1) \end{aligned}$$

donde $F(x) = \int_0^x f(\xi)d\xi$ y h cumple las condiciones de Lyapunov.

Con esto la representación en espacio de estados del oscilador de van der Pol, sería:

$$\dot{x}_1 = \mu(x_1 + x_2 - \frac{1}{3}x_1^3) \quad (3)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{\mu}x_1 \quad (4)$$

El modelo BVP es una generalización del oscilador de van der Pol, y consiste en la adición de algunos términos a las expresiones (3) y (4), como sigue:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) = \mu \left(x_1 + x_2 - \frac{1}{3}x_1^3 + \varepsilon \right) \quad (5)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) = -\frac{1}{\mu}(x_1 - \alpha + \beta x_2) \quad (6)$$

donde

$$1 - \frac{2\beta}{3} < \alpha < 1, \quad 0 < \beta < 1, \quad \beta < \mu^2$$

Con estas restricciones, la función $x_1(t)$ genera formas de onda semejantes a las del pulso cardíaco como se muestra en Fig. 2.

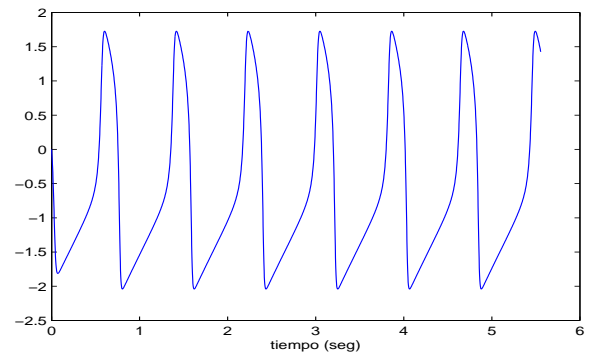


Fig. 2. Respuesta $x_1(t)$ del modelo para $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.5$, $\varepsilon = -1.4$ y $\mu = 3$

III. METODOLOGÍA

A. Base de datos

En este experimento se emplearon los registros (señales) de la base de datos del MIT (MIT - BIH) que contienen 16 tipos de arritmia [4].

B. Preproceso

En esta etapa se eliminan las ondas P y T para comparar, posteriormente, la morfología de la señal ECG con la respuesta del modelo. Una forma sencilla e intuitiva de hacerlo sería aplicando una función no lineal de rectificación para hacer cero los valores que sean menores a un umbral definido como el pico más alto entre la onda T y P. Sin embargo, esto genera pérdidas considerables de información en el contorno del complejo QRS (ver Fig. 3), por esta razón en este trabajo se prefirió derivar la señal.

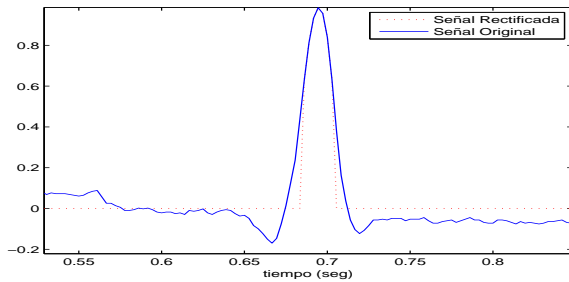


Fig. 3. Señal rectificada

La derivada de la señal y se obtuvo aplicando:

$$y_d[k-1] = y[k+1] - y[k-1], \quad k = 2 : L - 1 \quad (7)$$

donde L es la longitud de la señal.

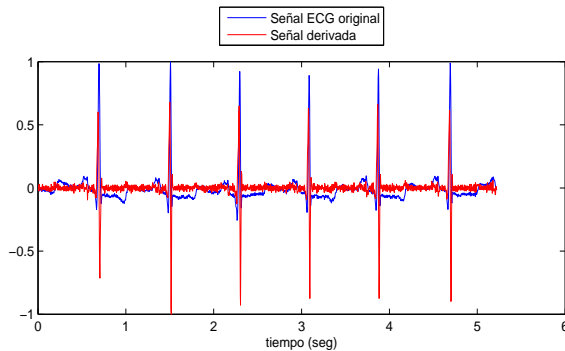


Fig. 4. Derivada de la señal

Adicionalmente, se normalizaron y rectificaron las señales correspondientes a la respuesta del modelo y la señal ECG aplicando la expresión (8), con el fin de eliminar el efecto de dc y ajustar el máximo valor de amplitud en uno.

$$y \leftarrow \frac{y - \mu(y)}{\max |y|} \quad (8)$$

C. Extracción secuencial de latidos

El análisis de cada latido se realiza de forma secuencial, es decir, que se sintonizan los parámetros asociados a un latido antes de pasar al siguiente, con excepción de los dos primeros latidos que se extraen simultáneamente porque algunos parámetros se sintonizan de forma diferencial. Para este efecto, se consideró 1 segundo como la duración de cada latido.

D. Sintonización de parámetros

La sintonización de los parámetros se realiza aplicando una medida de disimilitud entre la señal ECG *preprocesada* y la respuesta del modelo. La disimilitud se obtiene con el algoritmo de alineamiento temporal no lineal DTW, implementado como se sugiere en [2], sin aplicar restricciones globales (se denotará como $\text{dtw}(\cdot, \cdot)$).

El método propuesto en este trabajo consiste en ajustar, heurísticamente, los parámetros hasta que la disimilitud sea admisible, es decir, hasta que sea menor que un umbral pre-establecido ϵ .

Sean los parámetros $\{p_i^k\}_{i=1}^M$, donde M es la cantidad de parámetros, entonces, la actualización de los parámetros asociados al latido j en la iteración k es:

$$p_i^k(j) = p_i^{k-1}(j) + a\delta^k$$

donde

$$a = \text{sgn}(\text{dtw}(y_d^j, x_1\{p_i^k(j)\}) - \text{dtw}(y_d^j, x_1\{p_i^{k-1}(j)\}))$$

y $\text{sgn}(z) = \frac{|z|}{z}$. $x_1\{p_i(j)\}$ denota la respuesta del modelo asociada al latido j obtenida con el conjunto de parámetros p_i y y_d^j corresponde a la derivada del j -ésimo latido.

La inicialización (p_i^0) se realiza de forma aleatoria considerando las restricciones mencionadas en la sección anterior. El parámetro de aproximación δ^k se ajusta sistemáticamente hasta que $\text{dtw}(y_d^j, x_1\{p_i^k(j)\}) < \epsilon$ ($j = 1 : N$, donde N es la cantidad de latidos del registro).

En el algoritmo 1 se muestra el procedimiento propuesto para la sintonización heurística de los parámetros.

El conjunto final de parámetros $p_i(j)$ serán los parámetros óptimos, es decir, los que generan la mejor aproximación morfológica a la señal de interés.

E. Extracción de características

El conjunto de características que genera esta metodología son los parámetros de ajuste obtenidos por cada latido (ε , α y β), se omite μ porque no generaría buena separabilidad en tareas de clasificación puesto que este parámetro se relaciona únicamente con la amplitud, que en este caso no es relevante debido a las etapas de normalización.

Algoritmo 1 Algoritmo de sintonización heurística de los parámetros

```

Inicialización aleatoria:  $p_i^0(j)$ 
Inicialización:  $k = 1$ 
Hacer
Ciclo  $j$ :  $j = 1 : N$  ( $N$ : Cantidad de latidos)
Ciclo  $i$ :  $i = 1 : M$  ( $M$ : Cantidad de parámetros)
  Actualizar  $\delta^k$ 
   $a = \text{sgn}(\text{dtw}(y_d^j, x_1^j\{p_i^k(j)\}) - \text{dtw}(y_d^j, x_1^j\{p_i^{k-1}(j)\}))$ 
   $p_i^k(j) = p_i^{k-1}(j) + a\delta^k$ 
   $d = \text{dtw}(y_d^j, x_1^j\{p_i\})$ 
Fin Ciclo  $i$ 
Fin ciclo  $j$ 
 $k \leftarrow k + 1$ 
Hasta que  $d < \varepsilon$  ó  $k = K$  ( $K$ : Máximo de iteraciones)

```

IV. ANÁLISIS DE BIFURCACIONES

En esta etapa se estudian algunas condiciones y aplicaciones del análisis de bifurcaciones del modelo BVP para la detección de alguna patología y *outliers* como errores en el sistema de adquisición (pérdidas de adherencia en los electrodos) o movimientos del paciente.

La linealización entorno a un punto de equilibrio X^* puede escribirse como:

$$\dot{X} = AX$$

donde $A = \frac{\partial F}{\partial X} \Big|_{X=X^*}$ y $F = [f_1 \ f_2]$.

Con esto

$$A = \begin{bmatrix} 1 - x_1^{*2} & \mu \\ -\frac{1}{\mu} & -\frac{\beta}{\mu} \end{bmatrix} \quad (9)$$

y la ecuación característica sería:

$$\lambda^2 + (x_1^{*2} + \frac{\beta}{\mu} - 1)\lambda + 1 - \frac{1}{3}\mu(1 - x_1^{*2}) = 0 \quad (10)$$

De esta ecuación puede deducirse que

$$b = 1 - \frac{1}{3}\beta = 0 \quad (11)$$

es un punto de interés para determinar las bifurcaciones entorno al punto de equilibrio $X^* = (0, 0)$. Con la igualdad mostrada en (11), se puede establecer las siguientes condiciones para las bifurcaciones del modelo:

- Si $b < 0$ y $\Delta < 0$ es una variedad estable.
- Si $b > 0$ y $\Delta < 0$, es una variedad inestable.
- Si $b = 0$ y $\Delta < 0$, es un centro.
- Si $b = 0$ y $\Delta > 0$, es una variedad inestable.
- Si $b = \Delta = 0$, es un caso degenerado.

donde Δ es el discriminante de la ecuación característica.

En Fig. 5 se muestra la respuesta del modelo en condiciones límite de β para la representación del pulso cardíaco. Fig. 6 es el retrato de fase de la misma situación.

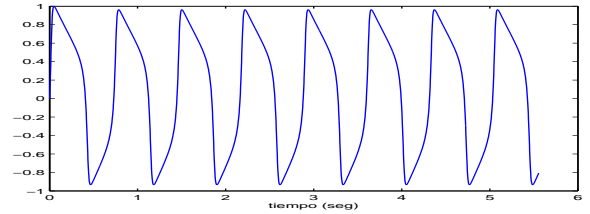


Fig. 5. Respuesta del modelo para ($\alpha = 0.1$, $\mu = 3$, $\beta = 1$ y $\varepsilon = 5e - 6$)

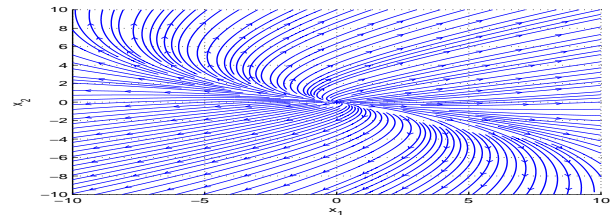


Fig. 6. Retrato de fase ($\alpha = 0.1$, $\mu = 3$, $\beta = 1$ y $\varepsilon = 5e - 6$)

En Fig. 7 se muestra el cambio de la respuesta ante la variación de β . Fig. 8 muestra el cambio del retrato de fase.

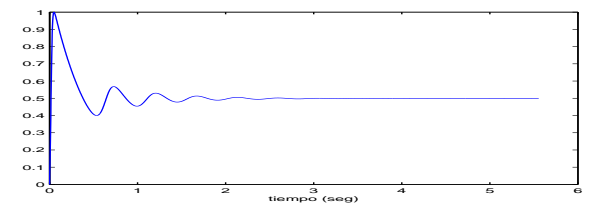


Fig. 7. Respuesta del modelo para ($\alpha = 0.1$, $\mu = 3$, $\beta = 1.5$ y $\varepsilon = 5e - 6$)

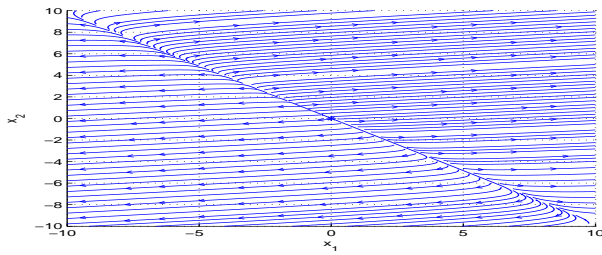


Fig. 8. Retrato de fase para $(\alpha = 0.1, \mu = 3, \beta = 1.5$ y $\varepsilon = 5e-6)$

V. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En Fig. 9 se muestra la respuesta del modelo con un valor de ε no óptimo.

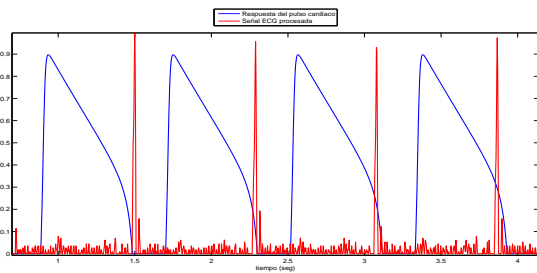


Fig. 9. Respuesta del modelo con ε no óptimo empleando el registro 100 ($\alpha = 0.1, \mu = 3$ y $\beta = 0.5$)

En Fig. 10 se muestra la onda $x_1(t)$ con valores de ε adecuados para aproximarse a una registro con latidos normales. Se puede apreciar que ε se relaciona directamente con el desplazamiento en el tiempo.

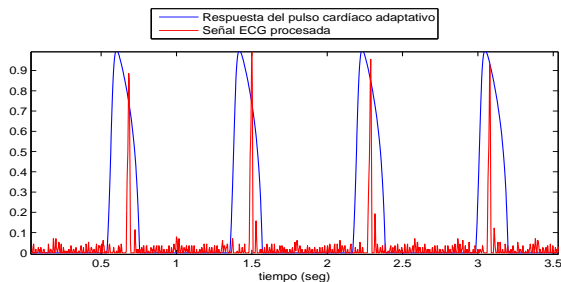


Fig. 10. Respuesta del modelo con ε óptimo empleando el registro 100 ($\alpha = 0.1, \mu = 3$ y $\beta = 0.5$)

La respuesta resultante del método se muestra en Fig.11. Se consideró $\epsilon = 0.1$ y $K = 1000$.

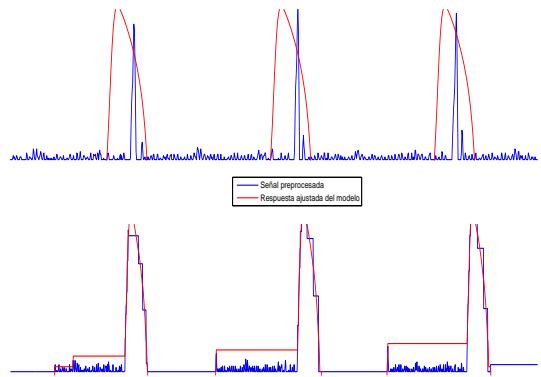


Fig. 11. Respuesta del modelo con parámetros sintonizados

En Fig. 7 y Fig. 8 se aprecia la bifurcación con respecto del parámetro β puede advertir la desconexión de un electrodo o una fibrilación. Otras bifurcaciones, se generan con los parámetros α y ε cuando se presentan latidos prematuros o taquicardias.

A continuación se muestra el cambio en la curva de equilibrio al variar los parámetros α y β partiendo de diferentes puntos iniciales. En Fig. 12 y Fig. 13, el punto inicial es $(0, 0)$. Se realizó un barrido de x_1 y x_2 con un tamaño de paso de 1^{-6} alrededor los valores iniciales. Para la elaboración de estas curvas se variaron los parámetros α y β , primero, por separado y luego de manera conjunta. Aunque alrededor del punto $(0, 0)$ no se puede obtener una curva de equilibrio variando el parámetro β porque este no tiene efecto sobre dicho punto (ver ecuación (6)).

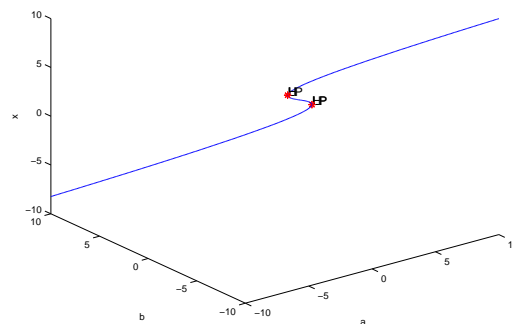


Fig. 12. Curva de equilibrio con $\beta = 2.8$

En Fig. 12 se puede observar que se presentan dos bifurcaciones de tipo Hopf, los valores de los parámetros

se muestran en la tabla I. *HP* denota una bifurcación de tipo Hopf.

TABLA I
VALORES PARA LAS BIFURCACIONES CUANDO $\beta = 2.8$ Y
 $(x_1(0), x_2(0)) = (0, 0)$

Tipo bifurcacion	x_1	x_2	α
HP	0.83	0.83	3.16
HP	-0.80	2.1	5.08

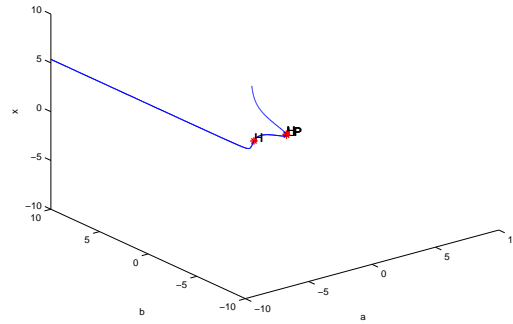


Fig. 14. Curva de equilibrio con $\alpha = -2$

TABLA III
VALORES PARA LAS BIFURCACIONES CUANDO $\alpha = -2$ Y EL
PUNTO INICIAL ES (1, 1)

Tipo de bifurcación	x_1	x_2	β
LP	1.12	0	-3.81
H	1.19	0.84	-3.80
H	-1.02	2.13	-0.46

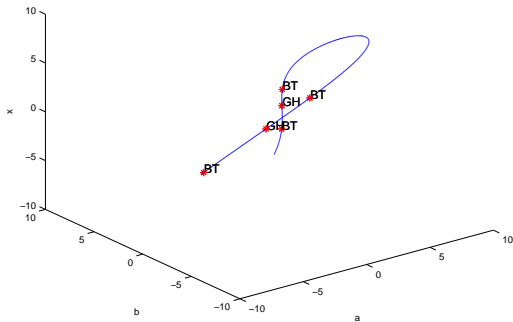


Fig. 13. Diagrama de bifurcaciones con α y β variables

En Fig.13 se observan 2 tipos de bifurcaciones: Bogdanov-Takens (*BT*) y de Hopf generalizada (*GH*).

TABLA II
VALORES PARA LAS BIFURCACIONES CUANDO α Y β SON
VARIABLES Y $(x_1(0), x_2(0)) = (0, 0)$

Tipo de bifurcación	x_1	x_2	α	β
BT	0.82	0.83	3.32	3
GH	0.97	0.80	1.38	0.51
BT	1.15	0.83	-1.33	-3
BT	-0.82	2.10	5.50	3
GH	-0.97	2.14	0.13	0.51

Debido a que no es posible realizar una variación del parámetro β manteniendo α fijo alrededor del punto (0,0), se procedió a hacer un nuevo análisis alrededor del punto (1,1). Los resultados obtenidos se muestran en Fig. 14 y Fig. 15.

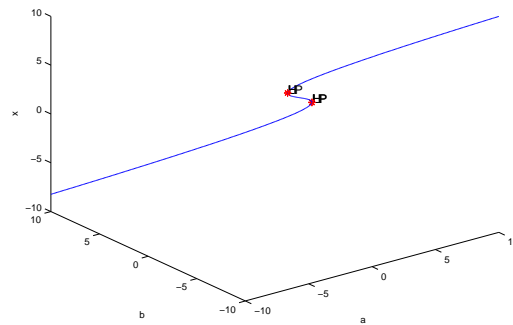


Fig. 15. Curva de equilibrio con $\beta = 2.8$

TABLA IV
VALORES PARA LAS BIFURCACIONES CUANDO $\beta = 2.8$ Y
 $(x_1(0), x_2(0)) = (1, 1)$

Tipo de bifurcación	x_1	x_2	α
LP	-0.80	2.1	5.08
H	-0.3	2.1	5.08
H	-0.3	2.11	5.08

En Fig. 14 se puede observar que se presenta un punto límite (*LP*) y dos bifurcaciones de Hopf. En Fig. 15 se observan el mismo número de bifurcaciones Hopf y un punto límite. Las tablas III y IV presentan los valores de x_1 , x_2 , α y β en los que se presentan dichas bifurcaciones.

VI. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

La caracterización de señales ECG a partir de la sintonización de parámetros de un modelo del pulso cardíaco puede representar una buena y novedosa alternativa porque existe una correlación de los

parámetros y las formas de onda con las bifurcaciones que ocurren en el modelo, aunque este procedimiento implica un coste computacional elevado. Además, los parámetros resultantes podrían presentar buena separabilidad en algunas patologías ventriculares y contracciones prematuras.

Se pretende continuar en este estudio con el fin de desarrollar un sistema de detección automática que tenga un método óptimo de sintonización para reducir el coste computacional, y que, además, presente explícitamente la relación con las bifurcaciones.

REFERENCIAS

- [1] Richard Fitzhugh. Impulses and physiological states in theoretical models nerve membrane. *Biophysical journal*, 1961.
- [2] D. Cuesta. *Estudio de métodos de para procesamiento y agrupación de señales electrocardiográficas*. 2001.
- [3] N. G. Lloyd y J. M. Pearson W. A. Albarakati. Transformation to liénard form. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2000.
- [4] R. G. Mark G. B. Moody. The mit-bih arrhythmia database on cd-rom and software for use with it. *Computers in Cardiology*, 1999.